# Спектральный анализ и синтез

Цифровой звук и видео

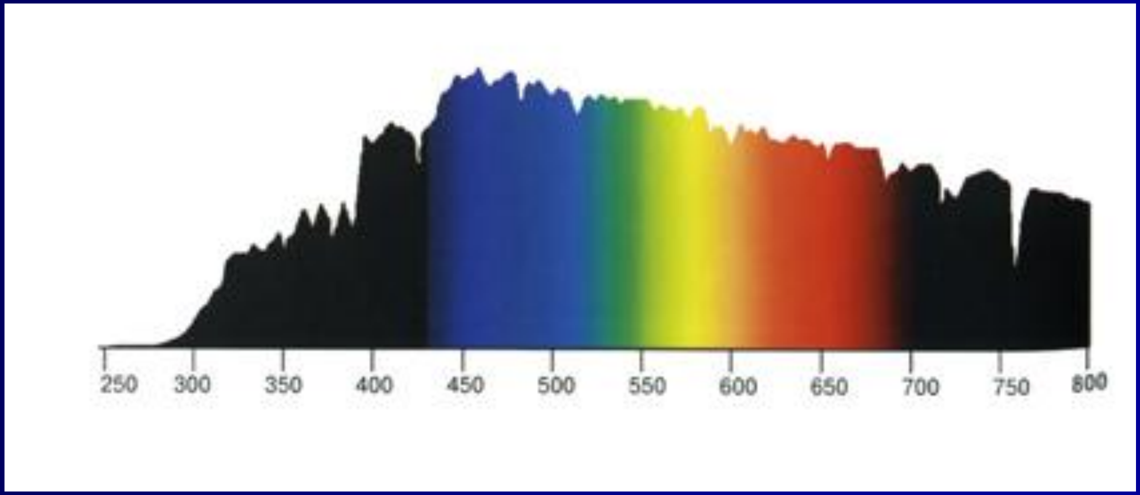
Лекция 2

# Анализ и синтез Фурье

- процесс разложения сложного периодического сигнала на простые гармонические составляющие называется анализом Фурье или спектральным анализом
- обратный процесс – конструирование сложного звука по его гармоническим составляющим называется синтезом Фурье

# Спектр

- спектральное распределение энергии – описание зависимости интенсивности света, исходящего от отдельных источников, от длины волны



# Теорема Фурье

- «любое периодическое колебание, какой бы сложности оно ни было, может быть представлено в виде суммы простых колебаний, чьи частоты являются гармониками основного тона (фундаментальной частоты), а амплитуды и фазы рассчитываются по определенному закону»

# Математический аппарат

- в зависимости от типа сигнала спектральный анализ использует:
  - ряд Фурье для периодических сигналов
  - интеграл Фурье для непериодических сигналов
  - дискретное преобразование Фурье (ДПФ) для цифровых сигналов
  - быстрое преобразование Фурье (БПФ) для цифровых сигналов

# Ряд Фурье

- Периодический детерминированный сигнал, отвечающий условию s(t) = s(t + T), может быть представлен в виде ряда Фурье:

$$U(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t),$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$

# Коэффициенты Фурье

- Амплитуды гармонических составляющих ряда определяются по следующим формулам:

$$a_0 = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} U(t)\,dt$$

$$a_n = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \cos n\omega_0 \,dt$$

$$b_n = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} U(t) \sin n\omega_0 \,dt$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$

# Бесконечный ряд Фурье

- Ряд Фурье можно записать в комплексной форме:

$$U(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{-i(n\omega_0 t - \varphi_n)}$$

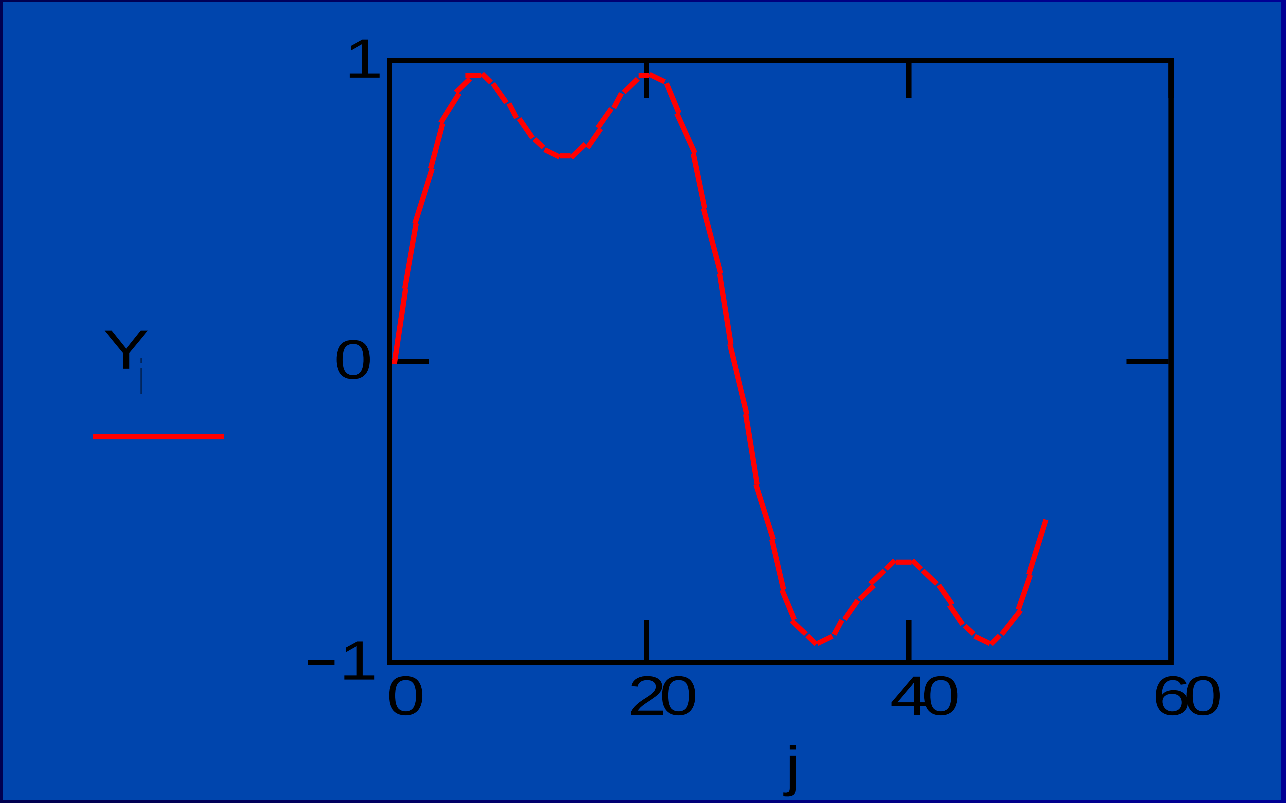
где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\mathrm{tg}(\varphi_n) = b_n / a_n$$

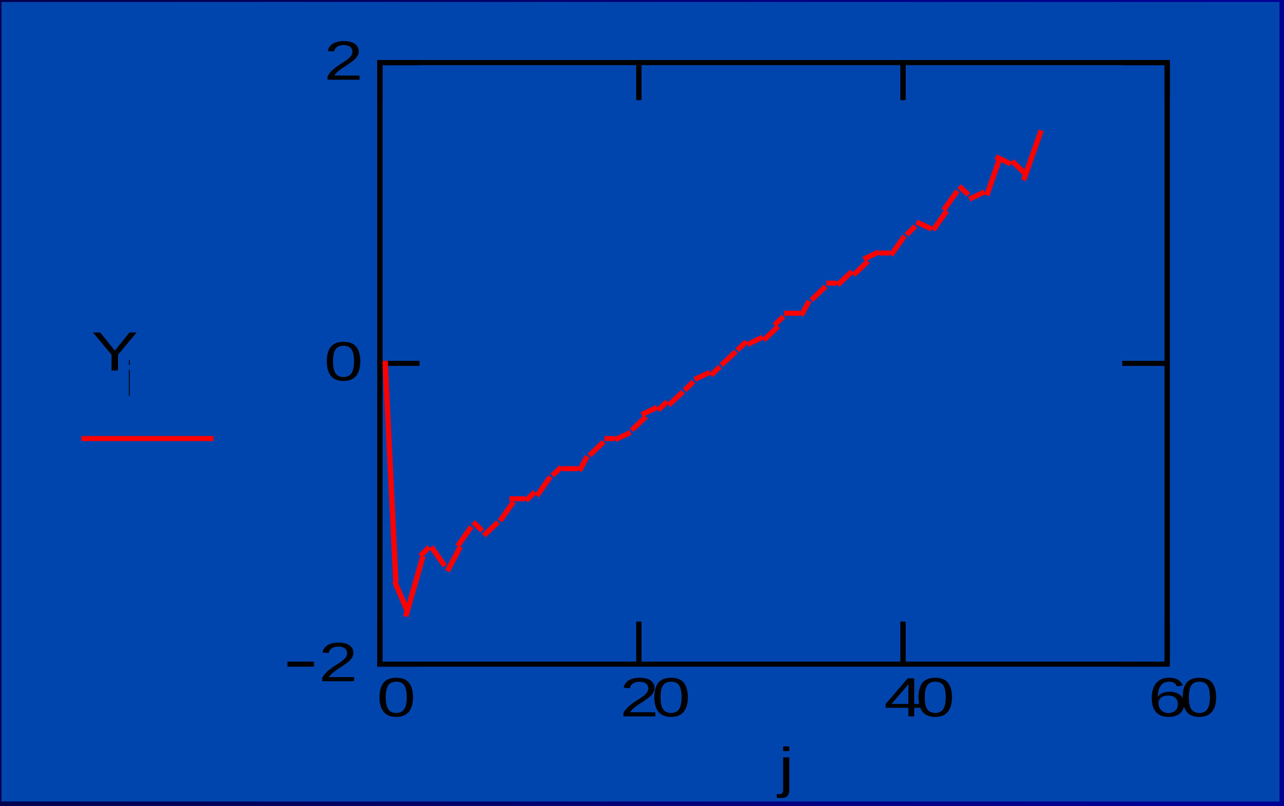
- совокупность всех амплитуд $A_n$ на шкале частот называется *амплитудным спектром*
- совокупность всех фаз $\varphi_n$ – *фазовым спектром*

# Число гармоник




Гармонический синтез сигнала-меандра, при учете первых трех, девяти и пятнадцати гармоник

# Учет вида сигнала




Гармонический синтез сигнала-пилы при учете первых трех, шести и пятнадцати гармоник

# Расчет спектров

- Расчет амплитуд и фаз составляющих гармоник любых звуковых сигналов
  - либо выполняется специальными приборами – спектроанализаторами
  - либо осуществляется программным путем (практически в любом музыкальном редакторе есть операция спектрального анализа)

# Интеграл Фурье

$$U(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \times e^{i\omega t} d\omega$$

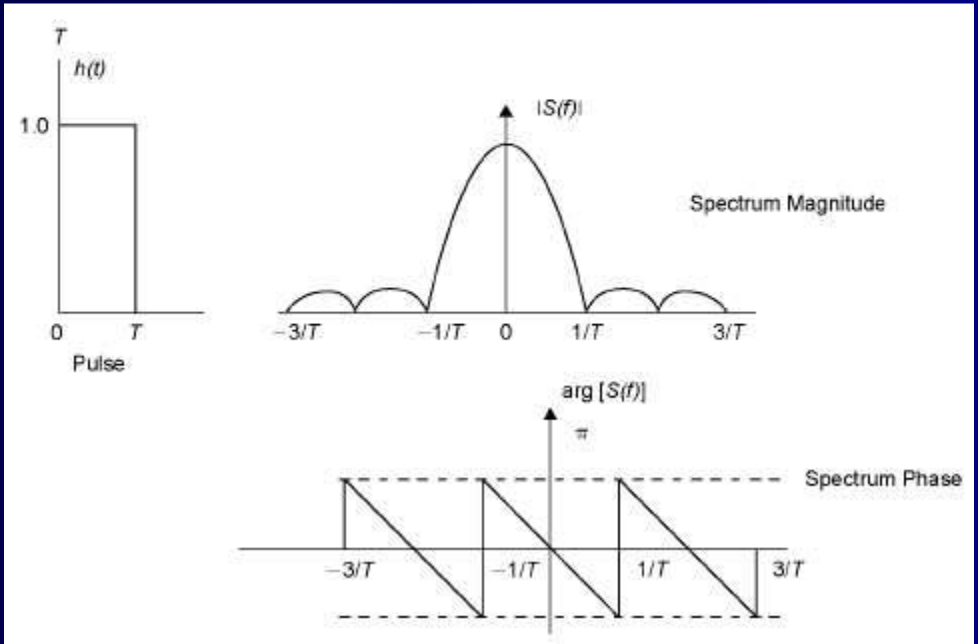
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \times e^{-i\omega t} dt$$

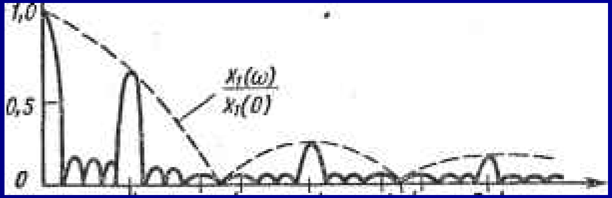
где *U(t)* – непериодический сигнал,

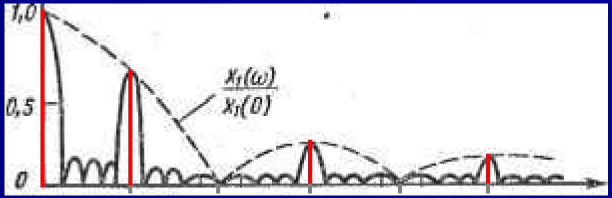
*S(ω)* – спектральная плотность сигнала

$$U(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega t)+\ldots\right]$$

# Вид спектра




$$U(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega t)+\ldots\right]$$

# Дискретное преобразование

- Прямое преобразование Фурье:

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

где $n$=0, 1, …, $N$-1

- Обратное преобразование Фурье:

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) K(in) e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

где $k$=0,1,…,$N$-1

# Расчет ДПФ

- Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

  *Ряд Фурье*

  Частоты и амплитуды

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} C_k \cos\frac{2\pi k(n+\varphi_k)}{N}$$

  Эквивалентная запись без фазы

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} A_k \cos\frac{2\pi kn}{N} + \sum_{k=0}^{N/2} B_k \sin\frac{2\pi kn}{N}$$

- Прямое и обратное ДПФ

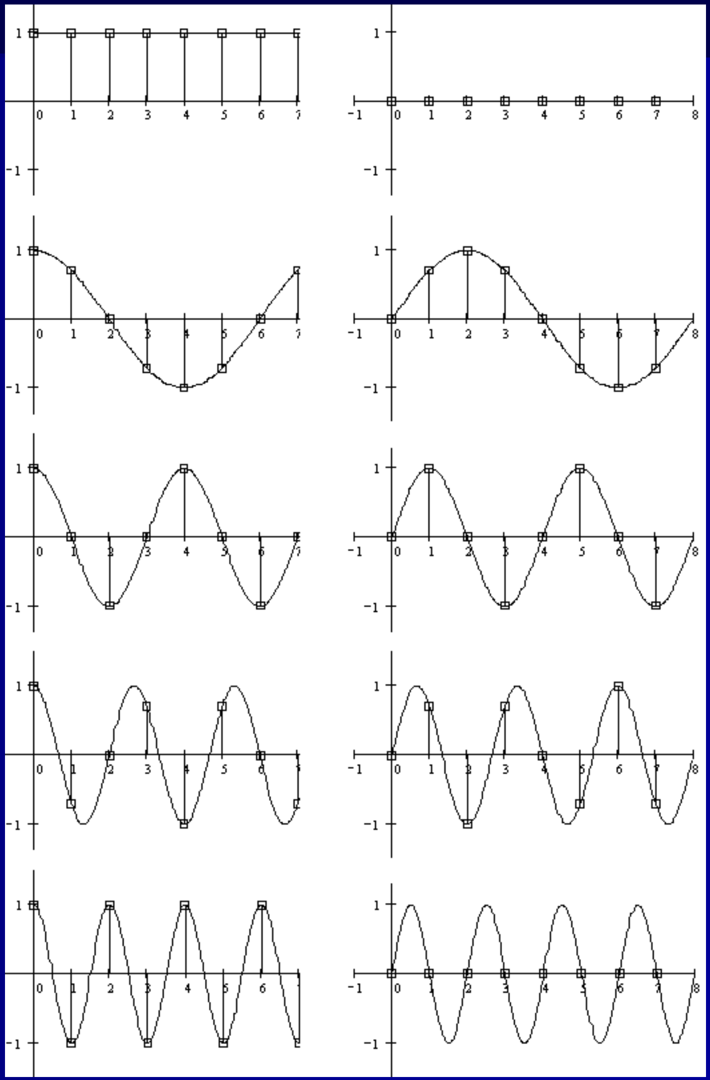
# Базисные функции ДПФ

- Базисные функции дискретного преобразования Фурье для сигнала длины N = 8.

  Имеем N/2 + 1 = 5 различных базисных частот.

  Имеем N+2 базисные функции, 2 из которых тождественно равны нулю.

  Количество информации не изменяется: N чисел



# Коэффициенты Фурье

- Для каждого сигнала можно однозначно определить коэффициенты $A_k$ и $B_k$
- Следовательно, разложение обратимо, т.е. по коэффициентам разложения ($A_k$, $B_k$) можно точно восстановить исходный дискретный сигнал
- Обратное преобразование Фурье – вычисление суммы конечного ряда Фурье (сложить N штук N-точечных синусоид со своими коэффициентами)

# Расчет коэффициентов

- Прямое преобразование Фурье – вычисление скалярных произведений сигнала на базисные функции:

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \cos \frac{2\pi k i}{N} \qquad k = 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

$$A_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \cos \frac{2\pi k i}{N} \qquad k = 0, \frac{N}{2}$$

$$B_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \sin \frac{2\pi k i}{N} \qquad k = 0, \ldots, \frac{N}{2}$$

- Для вычисления всех коэффициентов по этому алгоритму требуется примерно $N^2$ умножений: очень много при больших длинах сигнала $N$

# Fast Fourier transform

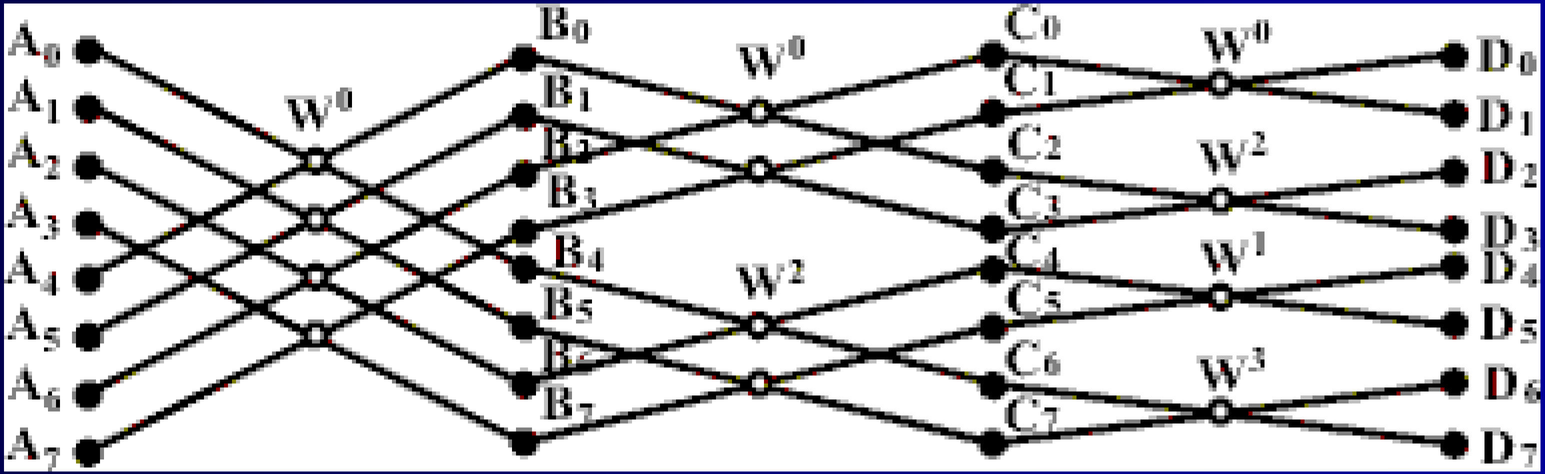
- Быстрое преобразование Фурье (БПФ, FFT) – ускоренный алгоритм вычисления ДПФ
  - Основан на периодичности базисных функций (много одинаковых множителей)
  - Математически точен (ошибки округления даже меньше, т.к. меньше число операций)
- Ограничение: большинство реализаций FFT принимают только массивы длиной $N = 2^m$
- Существует и обратное БПФ (IFFT)

# БПФ

- БПФ заключается в многократном членении заданной последовательности временных отсчетов на более короткие последовательности
  – выбирают размер последовательности кратным степени двойки ($N = 2^n$)
- выделяем две последовательности: четных и нечетных элементов, затем разбиением каждой подпоследовательности доходим до простейших, содержащих два элемента

# Алгоритм БПФ

- Схема выполнения операций при 8-точечном БПФ



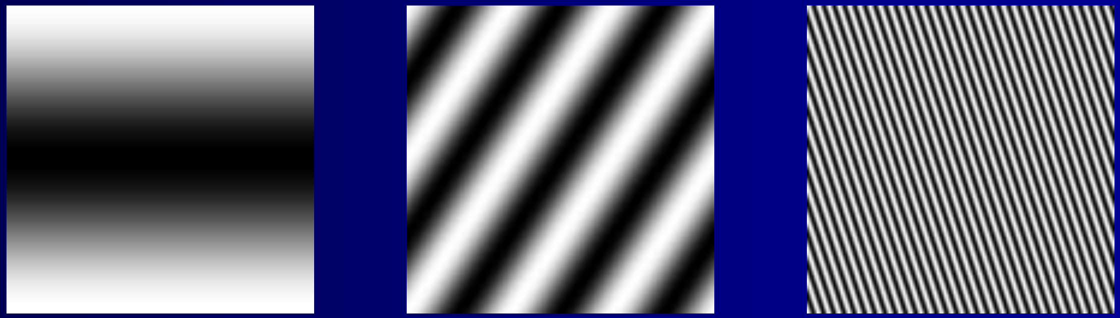
# Преимущества БПФ

- для $N$-точечной последовательности
  - Вычисление ДПФ требует $N^2$ умножений
  - Вычисление БПФ требует примерно $N \times log_2(N)$ операций умножения
- столь большое сокращение числа операций резко уменьшает объем аппаратуры и повышает быстродействие цифровых устройств

# ДПФ изображений

- Двумерное ДПФ
  - Базисные функции имеют вид двумерных синусоид с разными углами наклона и фазами

$$\sin\left(\frac{2\pi ni}{N} + \frac{2\pi mj}{M}\right)$$



- Вычисление двумерного ДПФ

1. Прямой способ – скалярные произведения со всеми базисными функциями. Очень много операций.
2. Быстрый способ – декомпозиция на одномерные ДПФ

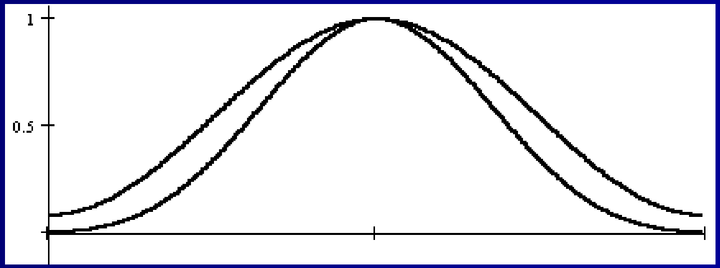
# Расчет двухмерного ДПФ

- Быстрое вычисление двумерного ДПФ
  1. Вычислить одномерные комплексные ДПФ от каждой строки изображения. Результаты записать в виде комплексных массивов «обратно» в промежуточное «комплексное» изображение
  2. Вычислить одномерные комплексные ДПФ от каждого столбца промежуточного комплексного изображения. Комплексные результаты записать «обратно». Это и есть коэффициенты двумерного ДПФ
- Одномерные ДПФ можно считать с помощью FFT

# Спектральный анализ

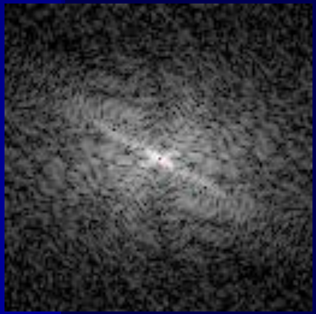
- Как вычислить и отобразить спектр сигнала?
  1. Взять нужный отрезок сигнала длины $2^m$; если нужный отрезок короче – дополнить его нулями.
  2. Если нужно – устранить из сигнала постоянную составляющую (вычесть константу – среднее значение).
  3. Если нужно – домножить сигнал на весовое окно, плавно спадающее к краям. Обычно это улучшает свойства спектра.
  4. Вычислить FFT.
  5. Перевести комплексные коэффициенты в полярную форму: получить амплитуды.
  6. Отобразить график зависимости амплитуды от частоты.

Примеры весовых окон



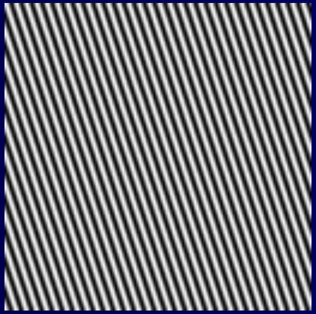
# Двухмерный спектр

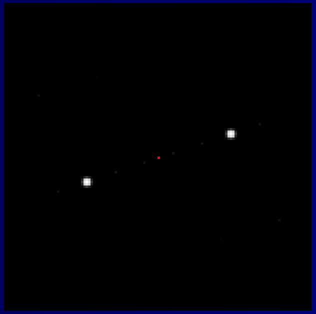
- Отображение спектров изображений:
  - Спектр – это картинка, показывающая зависимость амплитуды от частоты и от направления синусоиды
  - Амплитуды отображаются в виде яркостей
  - Нулевая частота – в центре спектра, низкие частоты вокруг центра, высокие – дальше от центра
  - Спектр обычно продублирован отражением от нулевой частоты
  - В реальных изображениях чаще всего гораздо большие амплитуды имеют низкие частоты (и постоянная составляющая). Поэтому постоянную составляющую иногда удаляют, или применяют логарифмический масштаб отображения амплитуд, чтобы пара самых мощных гармоник не скрыла остальные, менее мощные, но тоже существенные гармоники



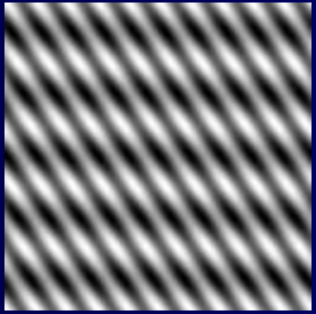
# Спектры изображений

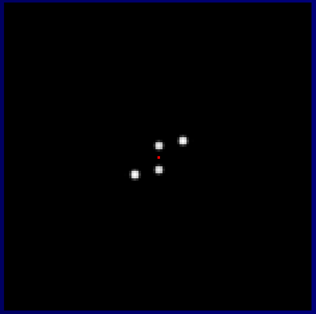
- Примеры изображений и их спектров





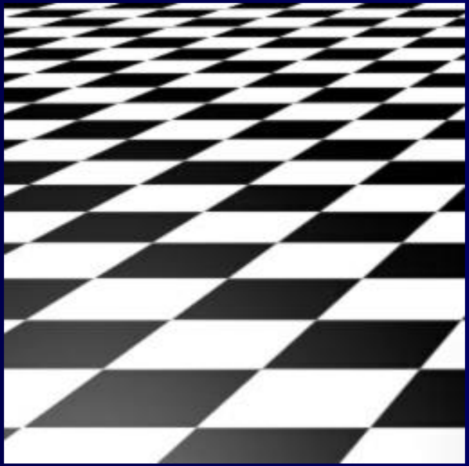
Видно, что спектр одной синусоиды – это точка
(не забываем про симметричное отражение спектра)

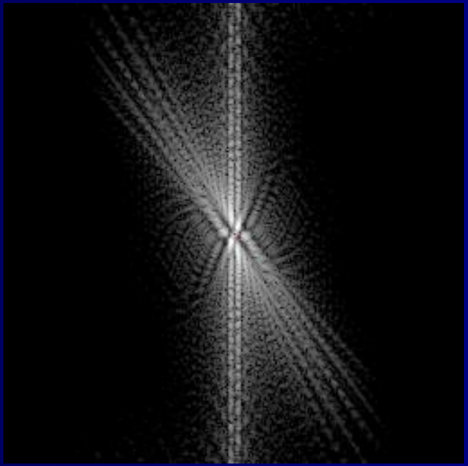




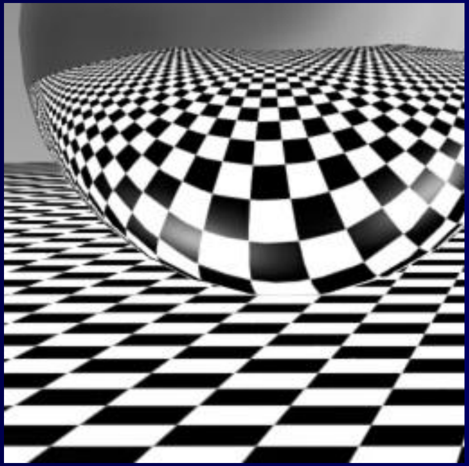
Две синусоиды – две точки

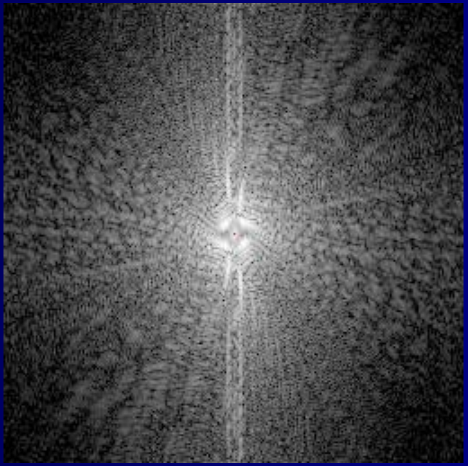
# Примеры спектров





По спектру прослеживаются преобладающие направления в исходной картинке





Много высоких частот в спектре – много мелких деталей в исходном изображении

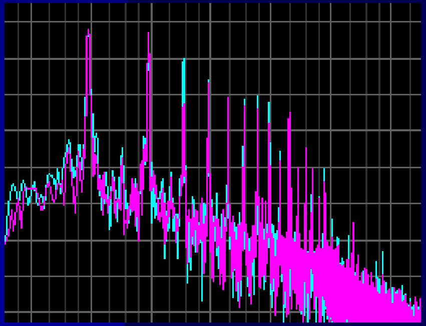
# Спектрограмма звука

- Отображение спектра звука: спектрограмма
  - Спектрограмма – график зависимости амплитуды от частоты
  - Низкие частоты – слева, высокие – справа
  - Часто применяется логарифмический масштаб частот и амплитуд: “log-log-спектрограмма”
  - Временное и частотное разрешение спектрограммы

Децибелы:

$$D = 20 \lg \frac{A_1}{A_0}$$

$A_1$ – амплитуда измеряемого сигнала,
$A_0$ – амплитуда сигнала, принятого за начало отсчета (0 дБ)

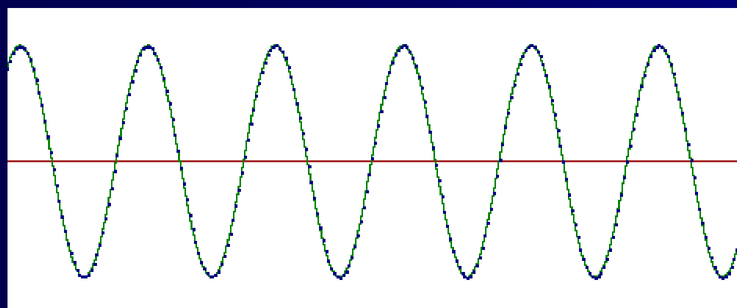


Разница на 6 дБ – разница по амплитуде в 2 раза,
разница на 12 дБ – разница по амплитуде в 4 раза.

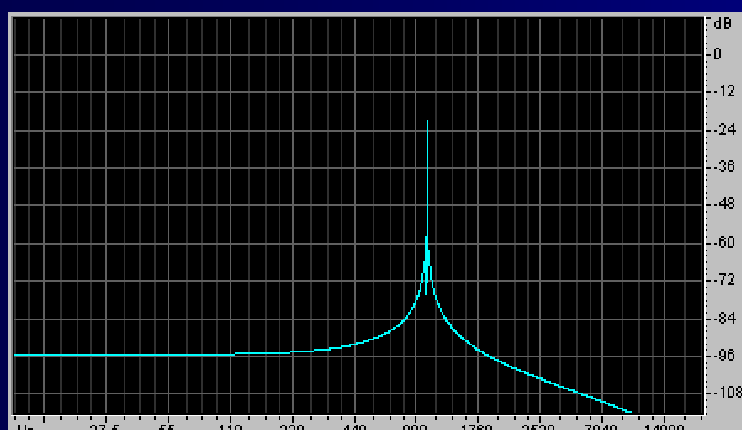
Часто за 0 дБ принимается либо самый тихий слышимый звук, либо самый громкий звук, который может воспроизвести аудиоустройство.

# Спектр синусоиды

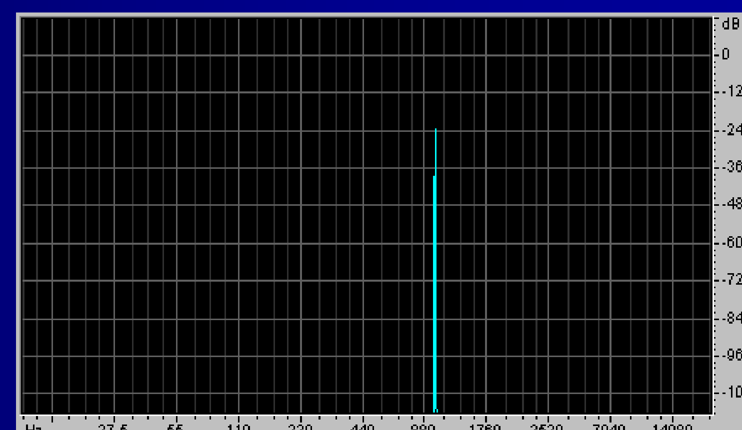
- Примеры звуков и их спектров



Исходная волна – синусоида

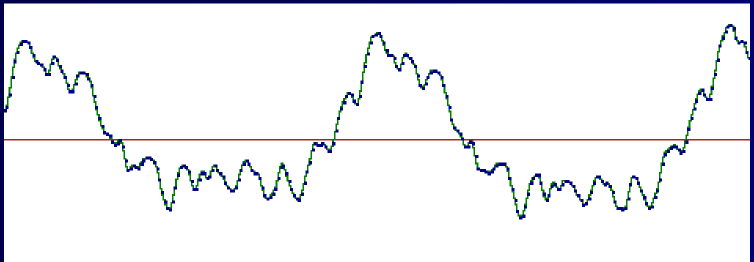



Спектр с одним весовым окном

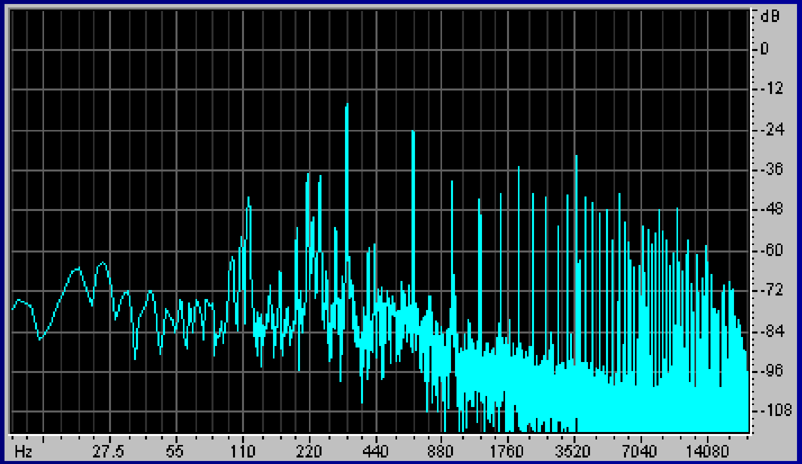


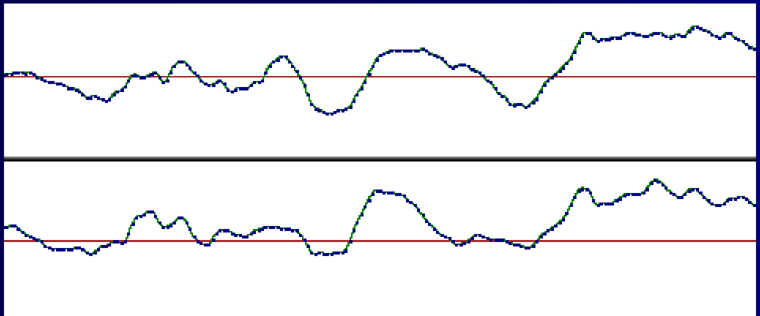

Спектр с другим весовым окном

# Спектры звуков

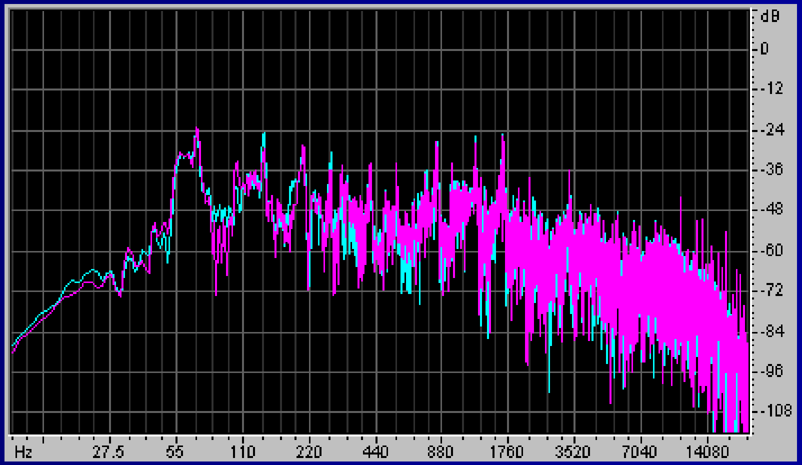


Нота на гитаре



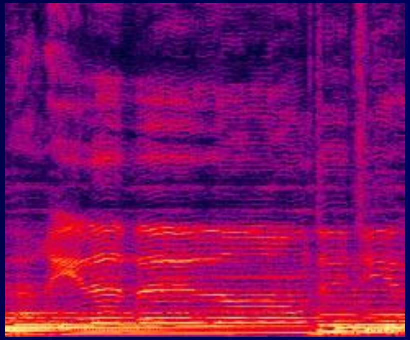



Песня (стерео запись)



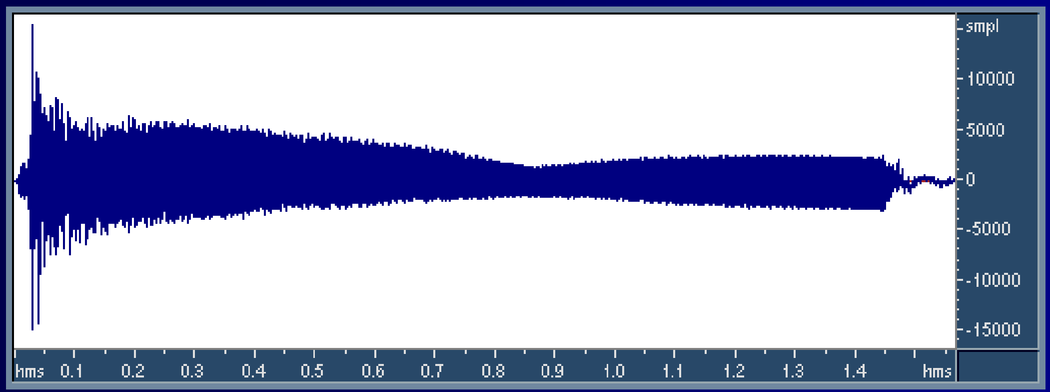
# Сонограмма

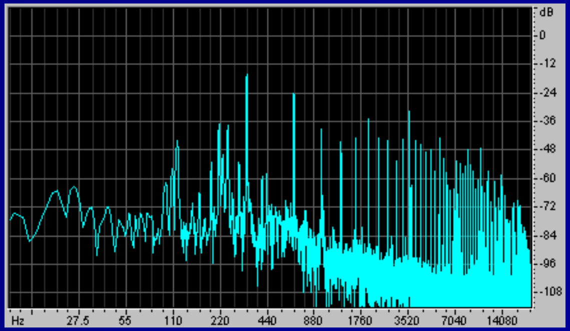
- Отображение спектра звука: сонограмма
  - Сонограмма – график зависимости амплитуды от частоты и от времени
  - Низкие частоты – снизу, высокие – сверху
  - Время идет справа налево
  - Амплитуда – яркость или цвет
  - Частотное и временное разрешение
  - Short Time Fourier Transform (STFT)

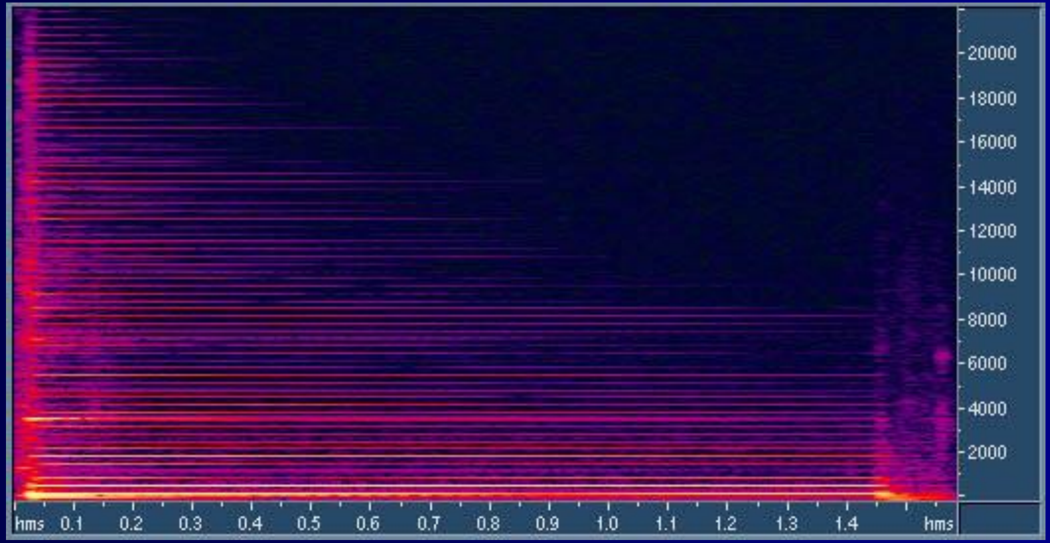


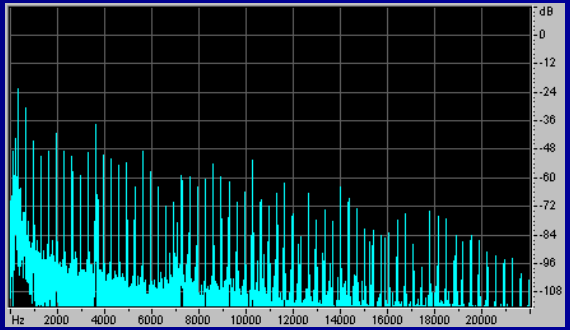
Показывает изменение спектра во времени

# Примеры сонограмм




Нота на гитаре

**Цикл лекций подготовлен в 2008/2009 уч.году Кузнецовым Игорем Ростиславовичем, профессором кафедры режиссуры мультимедиа Санкт-Петербургского Гуманитарного университета профсоюзов**

Прочитан в дисциплине
«Цифровой звук и видео»