



Информатика

Лекция 10

Алгебра множеств
(типы и структуры данных)

Понятие множества

- Понятие множества принадлежит к фундаментальным понятиям математики и не определяется
- Согласно Г.Кантору *под множеством понимается любое объединение в одно целое некоторых определенных и различных между собой объектов нашего восприятия или мысли*
- Множество определяется некоторым свойством (атрибутом), которым должен обладать (или не обладать) каждый рассматриваемый объект
- Атрибут – простое число, задает множество
$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

Универсальное множество

- Множество **A** считается заданным, если указано характеристическое свойство элементов этого множества, т. е. такое свойство, которым обладают все элементы множества и только они
- Можно либо дать перечень элементов множества (перечисление), либо дать правило для определения того, принадлежит или нет данный объект рассматриваемому множеству (описание) – *приемлемо для конечных множеств*
- Универсальное множество (универсум) – некоторое множество, фиксированное в рамках данной математической теории и содержащее в качестве элементов все объекты, рассматриваемые в этой теории

Обозначения

- Множество объектов, обладающих свойством $A(x)$, обозначим $\{x \mid A(x)\}$
Если некоторое множество $Y = \{x \mid A(x)\}$, то $A(x)$ называется характеристическим свойством множества Y
- Объекты, из которых состоит множество, называют *элементами множества* или *точками множества*
- Множества чаще всего обозначают заглавными буквами латинского алфавита, а его элементы — строчными. Если a - элемент множества A , то $a \in A$ (a принадлежит A). Если a не является элементом множества A , то $a \notin A$ (a не принадлежит A)
- В отличие от мультимножества каждый элемент множества уникален, и в множестве не может быть двух идентичных элементов.

Виды множеств

- Виды множеств
 - замкнутые и незамкнутые
 - полные и пустые
 - упорядоченные и неупорядоченные
 - счётные и несчётные
 - конечные и бесконечные
- Если A содержит конечное число элементов, то A называется *конечным* множеством и записывается как $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$, где $a_i \neq a_j$ для $i \neq j$ при этом порядок элементов не играет роли
- Существуют элементы, которым ничто не принадлежит – их называют *атомами*

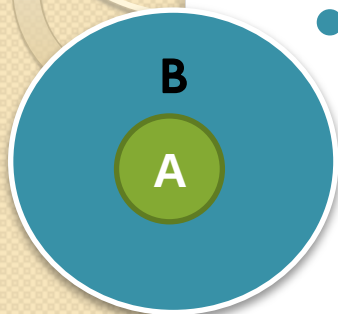
Задание множества

- Один из полезных способов задания множества – его определение с помощью **предиката**, т. е. утверждения, содержащего одно или несколько неизвестных и принимающего в зависимости от них одно из двух возможных значений: *истина* или *ложь*
- Множество, определяемое с помощью предиката состоит в точности из тех элементов, для которых предикат *истинен*

Примеры

- Пусть атомами будут натуральные числа
- Множество $A = \{ 1, \{2, 3\}, 4 \}$ имеет три элемента, причем атомы 2 и 3 не принадлежат множеству A
Можно записать и так $A = \{4, 1, \{3, 2\} \}$
- Пусть $P(X)$ – предикат X – четное натуральное число, т.е. $P(X)$ представляет утверждение « X принадлежит множеству натуральных и четно»
Тогда $A = \{ X \mid X \in \mathbb{N} \text{ и } \text{mod}_2 X = 0 \}$

Включение множеств

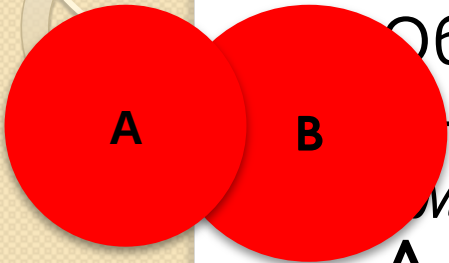


- *А включено в В, если каждый элемент множества А принадлежит также и множеству В: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A: a \in B$*
А - подмножество, В – надмножество
- *А включает В, если В включено в А:
 $A \supseteq B \Leftrightarrow B \subseteq A$*
- *А равно В, если А и В включены друг в друга: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$*

Отношения множеств

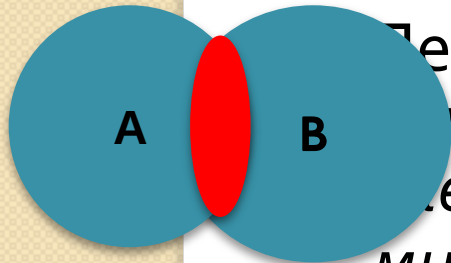
- *А строго включено в В, если А включено в В, но не равно ему:*
 $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$
- *А строго включает В, если В строго включено в А:*
 $A \supset B \Leftrightarrow B \subset A$
- *А и В не пересекаются, если у них нет общих элементов:*
 $A \text{ и } B \text{ не пересекаются} \Leftrightarrow \forall a \in A: a \notin B$
- *А и В находятся в общем положении, если существует элемент, принадлежащий исключительно множеству А, элемент, принадлежащий исключительно множеству В, а также элемент, принадлежащий обоим множествам:*
 $A \text{ и } B \text{ находятся в общем положении} \Leftrightarrow$
 $\exists a, b, c: (a \in A) \wedge (a \notin B) \wedge (b \in B) \wedge (b \notin A) \wedge (c \in A) \wedge (c \in B)$

Операции над множествами



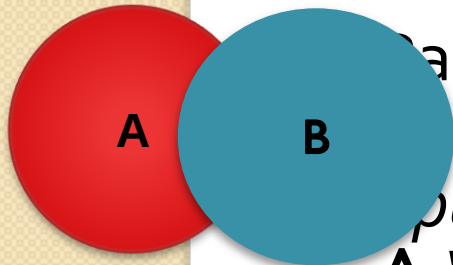
Объединением множеств A и B называется множество, содержащее все элементы из A вместе со всеми элементами из B :

$$A \cup B = \{ X \mid X \in A \text{ или } X \in B \}$$



Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат обоим множествам A и B :

$$A \cap B = \{ X \mid X \in A \text{ и } X \in B \}$$



Разностью множеств A и B называется множество тех элементов из A , которые не принадлежат множеству B :

$$A \setminus B = \{ X \mid X \in A \text{ и } X \notin B \} = A \cap \bar{B}$$

Свойства операций

- Ассоциативный закон
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
- Коммутативный закон
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
- Дистрибутивный закон
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
- Двойственность теоретико-множественных операций
$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$$
$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$$

Декартово произведение

- Обозначим (a, b) *упорядоченную пару*, состоящую из объектов a и b
- Упорядоченные пары (a, b) и (c, d) называются равными, если $a=c$ и $b=d$
- *Декартовым произведением* множеств A и B , обозначаемым $A \times B$, называют множество $\{ (a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B \}$
- Пусть $A = \{1, 2\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$ тогда $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

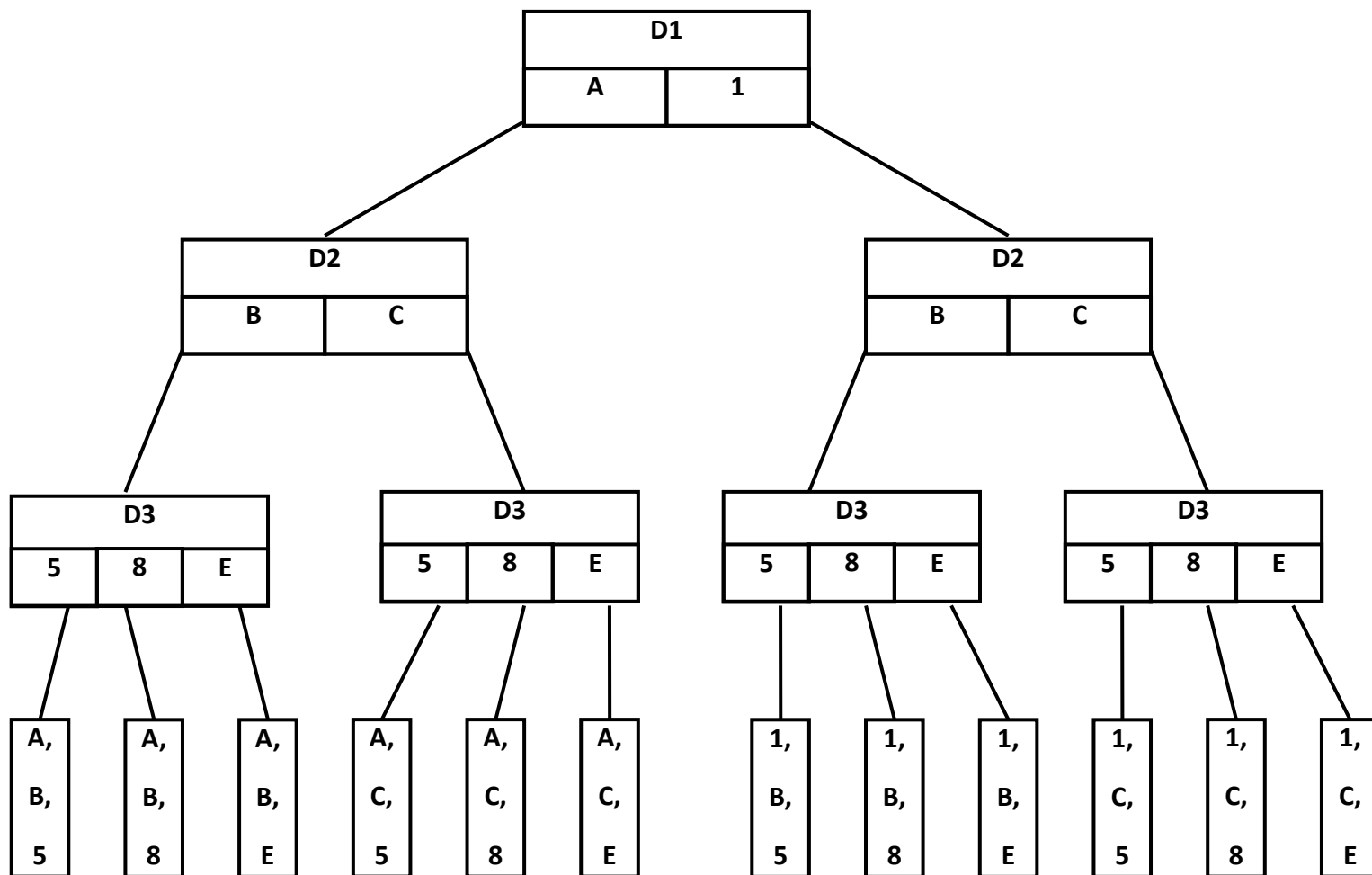
Декартово произведение

- Декартовым произведением доменов $D_1, D_2, \dots, D_k$ называется множество всех кортежей длины k (т.е. состоящих из k элементов - по одному из каждого домена D_i).

$$D = D_1 \times D_2 \times \dots \times D_k,$$

$$\text{где } D_i = (d_{i,1}, d_{i,2}, \dots, d_{i,n})$$

Пример



Множественный тип

- Синтаксическая диаграмма



- Значение множественного типа может содержать *любое* количество *различных* элементов базового типа (пустое множество $\emptyset$, вплоть до всех возможных значений базового типа 2^n)
- Базовый тип – дискретные (упорядоченные) типы не более чем с 256 различными значениями

Пример

- type digits = set of 1..2;
var S: digits;

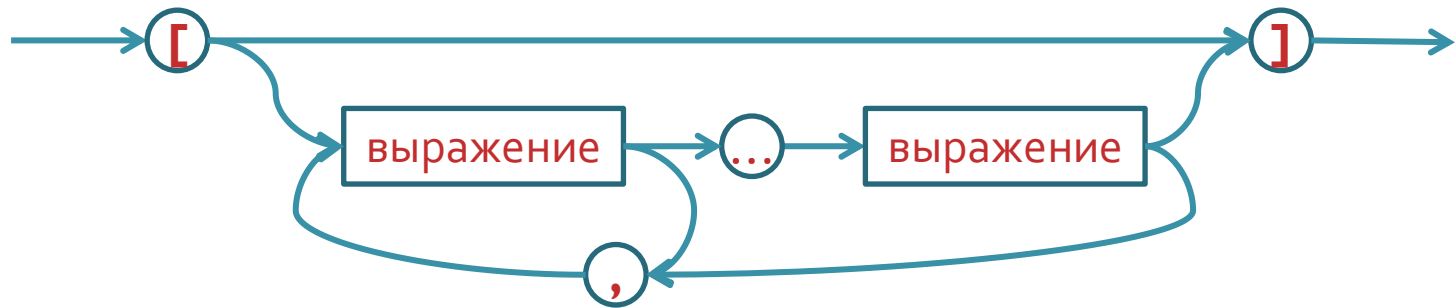
значения S: <пусто> | {1} | {2} | {1, 2}

- type ElemColor = (Red, Green, Blue);
Color = set of ElemColor;
var MyColor: Color;

значения MyColor: <пусто> | {Red} | {Green} |
{Blue} | {Red, Green} | {Red, Blue} | {Green, Blue} |
{Red, Green, Blue}

Конструктор

- Синтаксическая диаграмма



- В качестве элементов в изображении множества допускаются выражения, тип которых должен совпадать с базовым типом множества (включая ограниченный тип)
- V-переменная множественного типа;
S-множественное выражение; $V := S$

Операции и отношения

- Объединение $A \cup B \Leftrightarrow A + B$
- Пересечение $A \cap B \Leftrightarrow A * B$
- Разность $A \setminus B \Leftrightarrow A - B$
(для создания подвыражений используются круглые скобки)
- Проверка принадлежности $\in \Leftrightarrow \text{in}$
(правый операнд – множество; левый – значение базового типа множества)
- Отношения – равенство ($=$), неравенство ($<>$) и включение ($<=$) $\Leftrightarrow (\subseteq)$ или ($>=$) $\Leftrightarrow (\supseteq)$

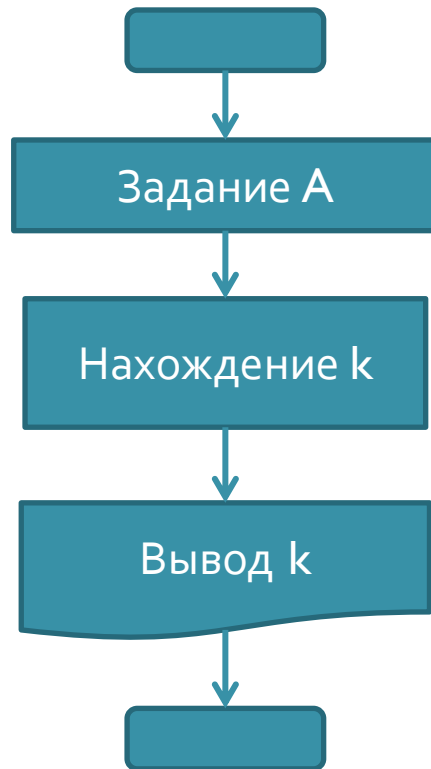
Формирование множества

- Формирование значений переменной множественного типа при вводе осуществляется с помощью циклического процесса и операции объединения (добавления)
 - Procedure Include (var S: set of T, W : T);
добавляет к множеству S подмножество W
 - Procedure Exclude (var S: set of T, W : T);
удаляет из множества S подмножество W
(здесь S – переменная; W – выражение типа T)

Задача

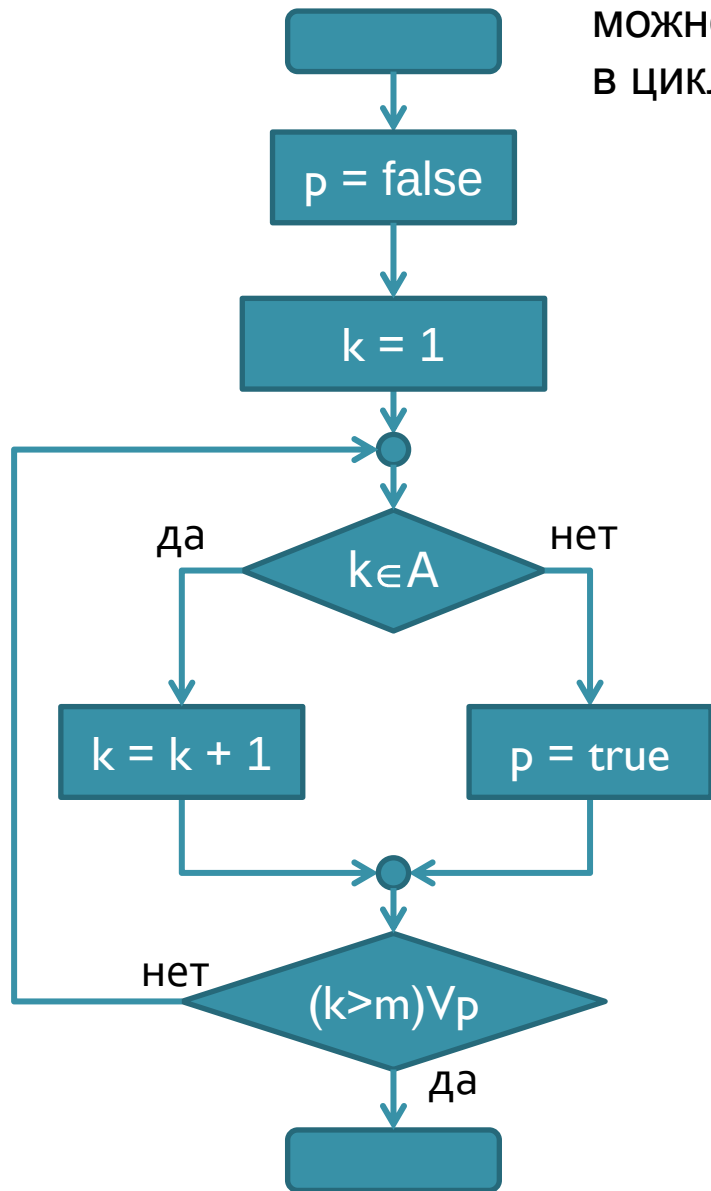
- Дано множество натуральных чисел. Найти наименьшее натуральное число, не принадлежащее данному множеству
Примеры: $A = \{2, 5, 18\}$ ответ 1
 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ответ 5
- Дано множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, где $a_i \in \mathbb{N}$. Пусть $B = \{b_j \mid b_j \in \mathbb{N} \text{ и } b_j \notin A\}$, тогда $k = \min \{b_j\}$
Ограничив универсум рассуждений получим –
 $n = |\mathbb{N}|$, $B = \mathbb{N} \setminus A$, $|B| = n - m$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-m}\}$

Первый уровень алгоритма

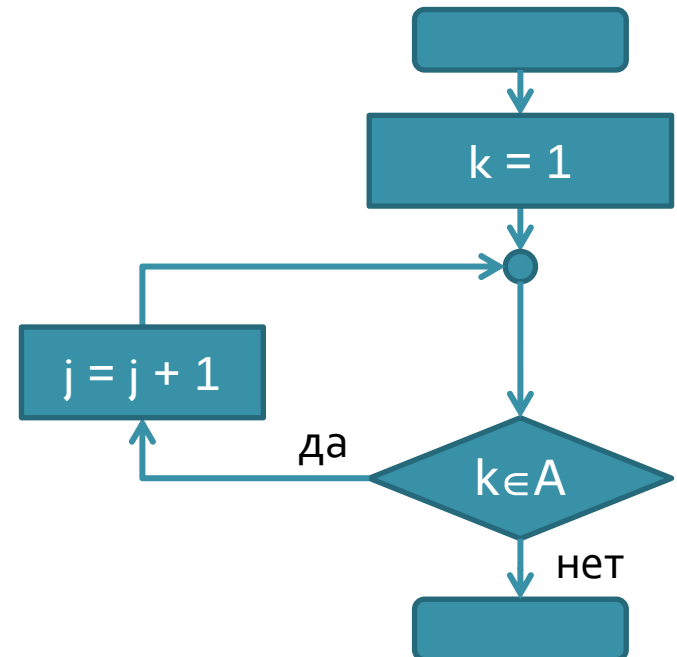


Раскроем блок
нахождения k

можно преобразовать
в цикл `do_while`



можно преобразовать
в цикл `do_until`



Текст программы (Pascal)

- ```
program Min;
const max = 255; kol = 3; full = [1..max]; empty = [];
type natural = 1..max; mnosh = set of natural;
 masm = array [1..kol] of mnosh;
var m, i, p, k : natural; A: mnosh; B: masm;
begin
 write ('задайте m= '); readln (m); A:=[];
 for i := 1 to m do begin
 write ('текущий элемент множества ');
 readln (p); A := A + [p]
 end;
 k := 1; while (k in A) do k := k + 1;
 write('наименьшее число вне A это ', k);
end.
```

**Цикл лекций подготовлен в 2013/2014уч. году  
Кузнецовым Игорем Ростиславовичем,  
доцентом кафедры радиоэлектронных средств  
Санкт-Петербургского  
Государственного электротехнического  
университета «ЛЭТИ»**

Прочитан в дисциплине  
«Информатика»