



Информатика

Лекция 8

Матрицы

(типы и структуры данных)

Определение

- Матрица – прямоугольная таблица, состоящая из m -строк и n -столбцов, элементы которой a_{ik} принадлежат некоторому множеству (одно для всех a_{ik}) $i=1..m, k=1..n$

$$\|a_{ik}\|$$

- Типы матриц:
 - Целочисленная
 - Действительных чисел
 - Двоичная
 - Символьных строки т. д.
- Если $m = n$, то матрица называется квадратной матрицей порядка m

Квадратные матрицы

- Главная диагональ квадратной матрицы – это вектор $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$
- Квадратная матрица порядка n называется единичной матрицей, если все элементы ее главной диагонали равны 1, а все элементы вне этой диагонали равны 0.
- Нулевая матрица – это матрица, все элементы которой равны 0.
- След квадратной матрицы – сумма элементов, стоящих на главной диагонали

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Примеры матриц

- *Симметричной* называют матрицу, элементы которой, расположенные симметрично по отношению к главной диагонали, равны между собой
 $a_{ik} = a_{ki}$, где $i, k = 1..n$
- *Кососимметричной* называют матрицу, элементы которой, расположенные симметрично по отношению к главной диагонали, равны по величине и противоположны по знаку
 $a_{ik} = -a_{ki}$, где $i, k = 1..n$, причем $a_{ii} = 0$, где $i = 1..n$
- *Диагональной* называется матрица, все элементы которой равны нулю, кроме тех, что расположены на главной диагонали
 $a_{ik} = 0$, если $i \neq k$, и $a_{ik} \neq 0$, если $i = k$, где $i, k = 1..n$

Алгебра матриц

- Сумма

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}, \quad i=1..m, \quad k=1..n$$

- Разность

$$c_{ik} = a_{ik} - b_{ik}, \quad i=1..m, \quad k=1..n$$

- Произведение матриц (для прямоугольных матриц число столбцов матрицы А должно равняться числу строк матрицы В)

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}, \quad i=1..m, \quad k=1..n$$

(умножение матриц некоммукативно)

- Для единичной матрицы: **$AE = EA = A$**

Конструктор и селектор матриц

- Для конструктора используется регулярный тип – двумерный массив
T1 – тип строки (упорядоченный, дискретный)
T2 – тип столбца (упорядоченный, дискретный)
T3 – тип компонент матрицы



- Селектор



инд.выр. 1 – правило вычисления номера строки
инд.выр. 2 – правило вычисления номера столбца матрицы

Пример

- Дана прямоугольная матрица A , имеющая m -строк ($i=1..m$) и n -столбцов ($k=1..n$).
- Пусть
 $m_1 \in \mathbf{N}$ – максимальное число строк матрицы A
($m_1 = 13$)
 $n_1 \in \mathbf{N}$ – максимальное число столбцов матрицы A
($n_1 = 31$)
 $m, n \in \mathbf{N}$ – текущие значения числа строк и столбцов матрицы A ($1 < m < m_1$; $1 < n < n_1$)
- **Конструктор матрицы** –

```
const m1 = 13; n1 = 31;  
type index_1 = 1..m1;  
      index_2 = 1..n1;  
      matrix = array [index_1, index_2] of real;  
var m, i: index_1; n, j: index_2; A: matrix;
```

Бином Ньютона

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k a^{n-k} \quad (x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

Многочлен, получающийся при разложении по степеням суммы двух слагаемых

Примеры:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(1 + x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

- Расчет коэффициентов разложения

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \times 2 \times \dots \times k}$$

Треугольник Паскаля

- Таблица чисел, являющихся биномиальными коэффициентами

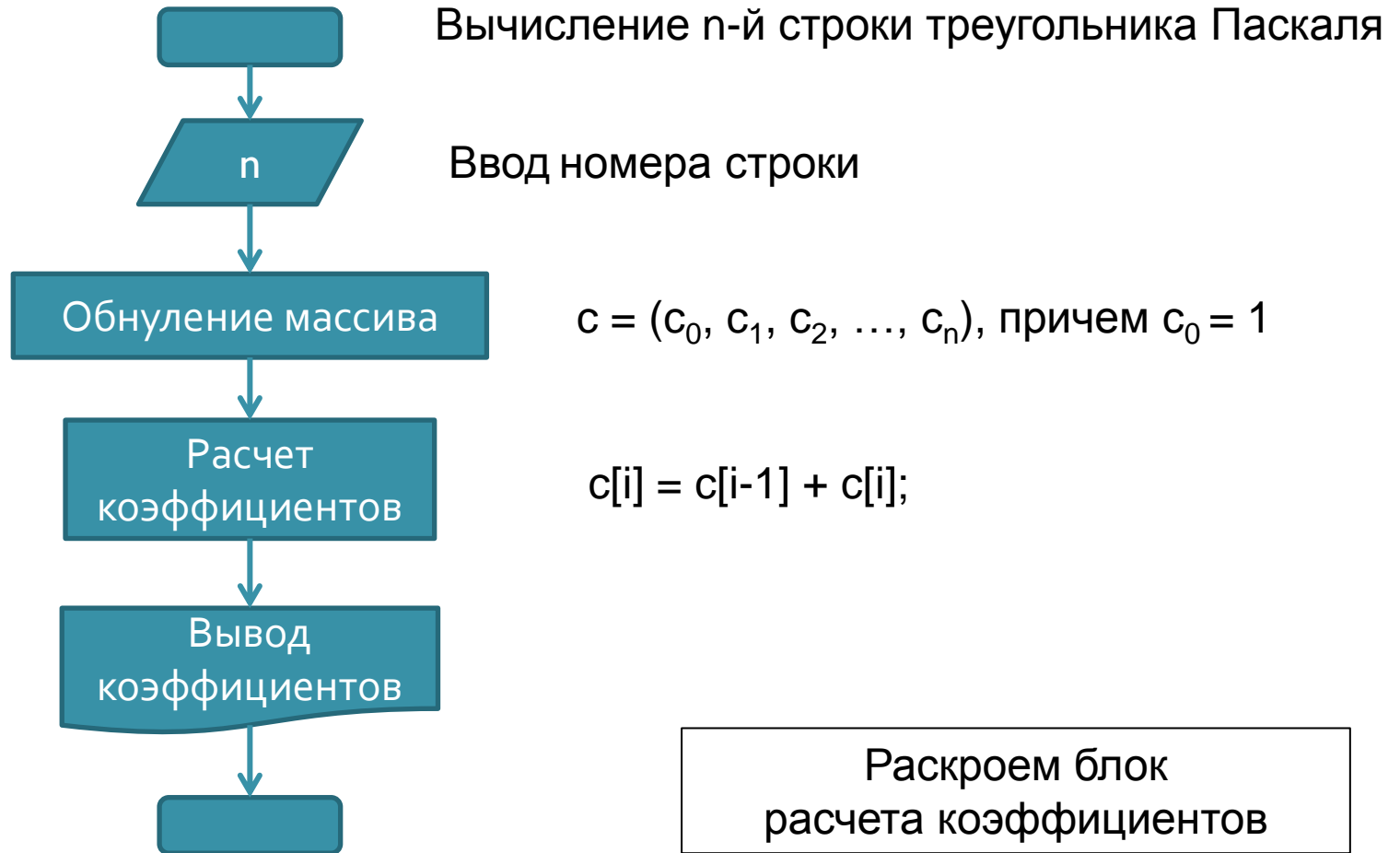
0:																				1	$(a+b)^n =$											
1:																				1	1	$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$										
2:																				1	2		1									
3:																				1	3		3	1								
4:																				1	4		6	4	1							
5:																				1	5		10	10	5	1						
6:																				1	6		15	20	15	6	1					
7:																				1	7		21	35	35	21	7	1				
8:																				1	8		28	56	70	56	28	8	1			
9:																				1	9		36	84	126	126	84	36	9	1		
10:																				1	10		45	120	210	252	210	120	45	10	1	
11:																				1	11		55	165	330	462	462	330	165	55	11	1
12:																				1	12		66	220	495	792	924	792	495	220	66	12

Треугольник Паскаля

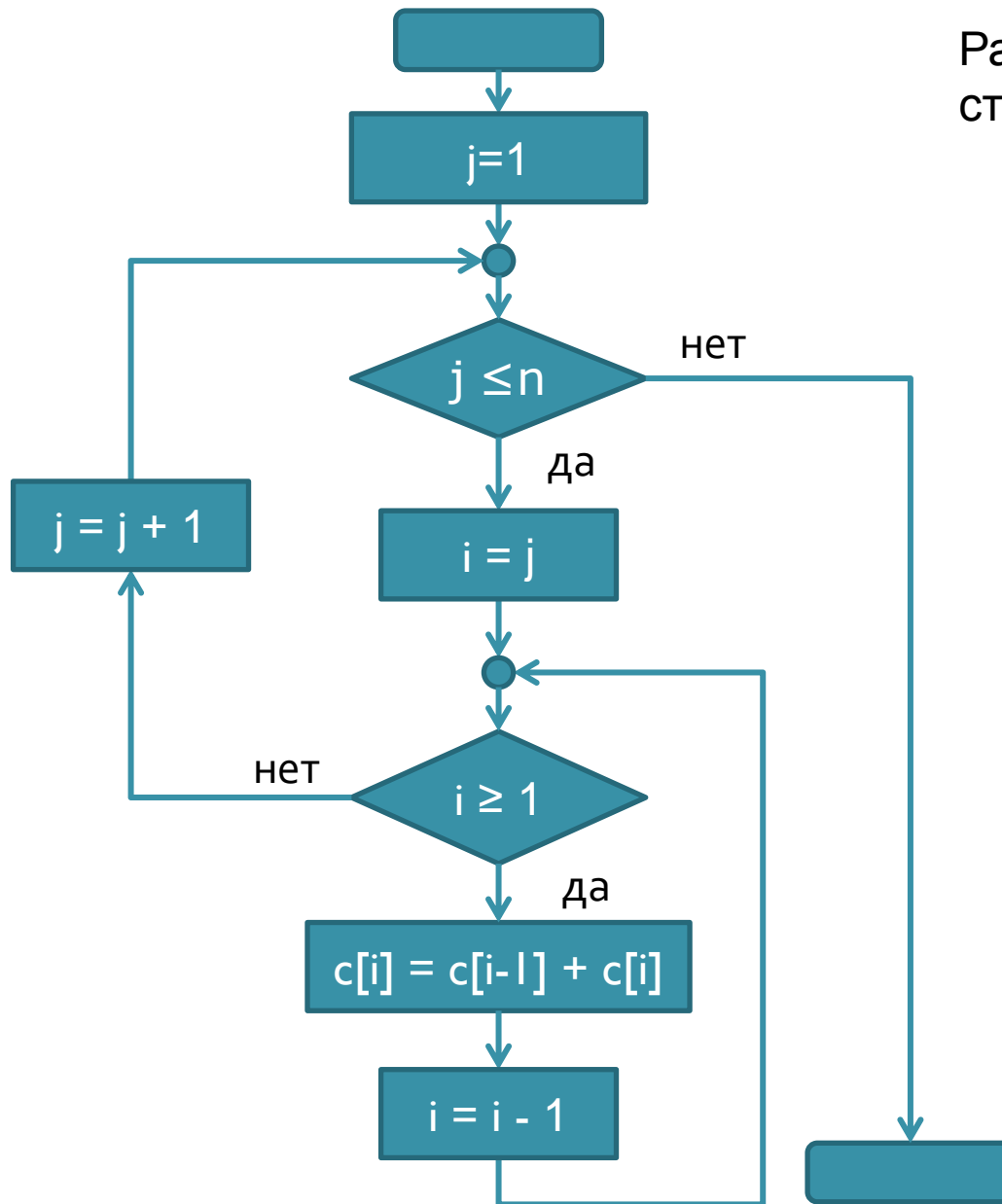
$$T_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Первый уровень алгоритма



Расчет коэффициентов
строки с номером n



Постановка задачи для ЭВМ

Зададим максимальное число элементов вектора c

$$n_1 \in \mathbb{N}, n_1=1000$$

$i, j, n \in \mathbb{N}$ – натуральные,

$$0 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n;$$

c – массив целого типа (регулярный тип)

также описываются форматы ввода-вывода всех данных
(зависят от используемого языка программирования)

Текст программы (C++)

- `#include <stdio.h>`
- `#define N 1000`
- `long c[N];`
- `int main ()`
- `{ long n, i, j;`
- `scanf ("%ld",&n);`
- `for(i = 1; i <= n; i++) c[i] = 0;`
- `c[0] = 1;`
- `for(j = 1; j <= n; j++)`
- `for(i = j; i >= 1; i--)`
- `c[i] = c[i-1] + c[i];`
- `for(i = 0; i <= n; i++) printf ("%ld ", c[i]);`
- `return 0;`
- `}`

**Цикл лекций подготовлен в 2013/2014уч. году
Кузнецовым Игорем Ростиславовичем,
доцентом кафедры радиоэлектронных средств
Санкт-Петербургского
Государственного электротехнического
университета «ЛЭТИ»**

Прочитан в дисциплине
«Информатика»